

第2讲 圆周角定理及应用

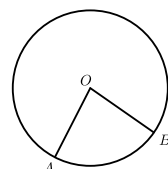
一、弧、弦、圆心角关系

1. 圆心角定义：顶点在_____，并且两边都和圆_____的角叫做圆心角。

！注意：（1） 1° 的弧：将整个圆分为360等份，每一份的弧对应 1° 的圆心角，也称这样的弧为 1° 的弧。

（2）圆心角的度数和它所对的_____的度数相等。

如图： $\widehat{AB}$ 的度数 $=\angle AOB$

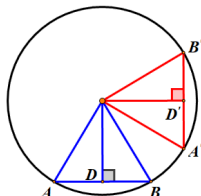


2. 弧、弦、圆心角关系

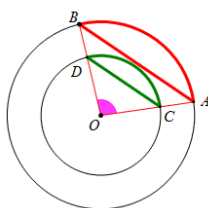
①在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的_____相等，所对的_____也相等。

②在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的_____相等，所对的_____相等。

③在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的_____相等，所对的_____和_____分别相等

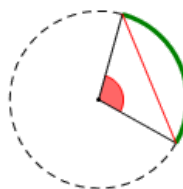
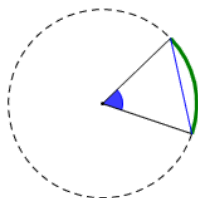


！注意：（1）不是同圆或等圆时，圆心角的度数相等，那么所对的弧和弦不相等。



（2）不是同圆或等圆时，两条弧的长度相等，那么所对的弦长和圆心角不相等。

（如图，绿色部分的弧长相等，但在不同大小的两个圆里，很显然圆心角和弦长大小不相等。）



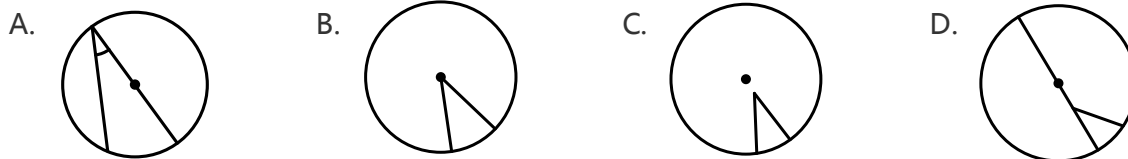
（3）不是同圆或等圆时，两条弦的长度相等，那么所对的弧长和圆心角不相等。

思考：如果在同圆或等圆中，一个圆心角的度数是另一个圆心角度数的2倍，那么大圆心角所对的弧长和弦长是小圆心角所对弧长和弦长的2倍吗？试着证明一下。

举个“栗”子

栗子1

1. 下列图形中的角是圆心角的是 () .



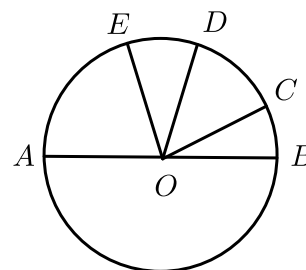
栗子2

2. 下列说法中，正确的是 () .

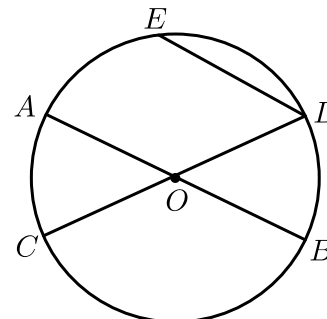
- A. 等弦所对的弧相等
- B. 相等的圆心角所对的弧相等
- C. 平分弦的直径垂直于弦
- D. 等弧所对的圆心角相等

栗子3

3. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弧 $BC = \text{弧} CD = \text{弧} DE$ ， $\angle AOE = 72^\circ$ ，则 $\angle COD$ 的大小= _____ (度) .

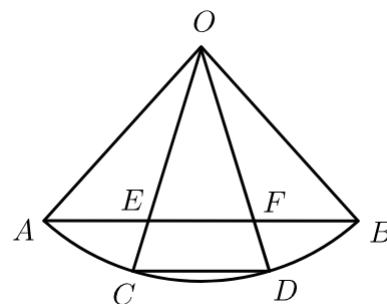


4. 如图， AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $DE \parallel AB$ ，弧 DE 为 50° (所对圆心角为 50°)的弧，那么 $\angle BOC$ 为 ()

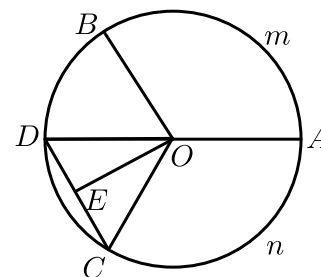


- A. 115°
- B. 100°
- C. 80°
- D. 50°

5. 如图，扇形 OAB 的圆心角为 90° ，点 C, D 是弧 AB 的三等分点，半径 OC, OD 分别与弦 AB 交于点 E, F ，下列说法错误的是（ ）。



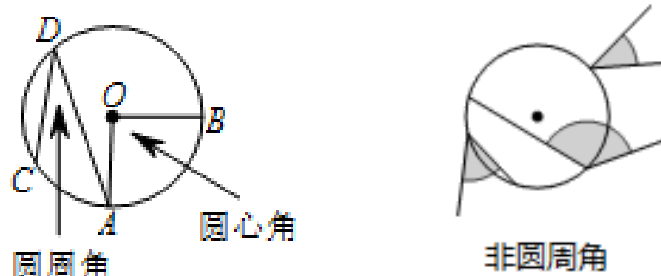
- A. $AE = EF = FB$ B. $AC = CD = DB$ C. $EC = FD$ D. $\angle DFB = 75^\circ$
6. 如图， AD 是 $\odot O$ 的直径，且 $AD = 6$ ，点 B, C 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AmB} = \widehat{AnC}$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，点 E 是线段 CD 的中点，则 $OE =$ （ ）。



- A. 1 B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

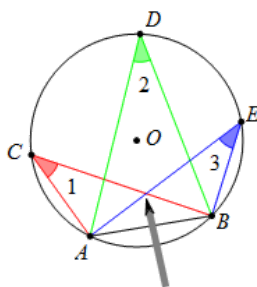
二、圆周角定理

1. 圆周角定义：顶点在_____，并且两边都和圆_____的角叫做圆周角。

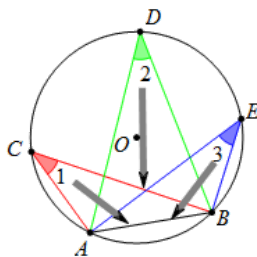


！注意识别弧与弦所对的圆周角：

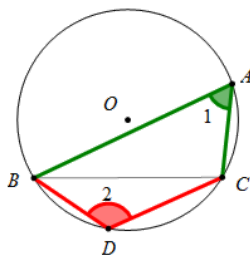
(1) 因为点 C 、 D 、 E 三点都在圆周上，且角的两边都和圆相交，所以，红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 三个角都是圆周角。从箭头的方向看过去，红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 都是 $\widehat{AB}$ 、弦 AB 所对的圆周角。



(2) 从下图箭头的方向看过去， $\widehat{AB}$ 、弦 AB 是红 $\angle 1$ 、绿 $\angle 2$ 、蓝 $\angle 3$ 三个圆周角所对的弧和弦。



(3) 一条弧可以对应多个圆周角，如上图；一条弦也对应多个圆周角，但是这多个圆周角要分两个情况进行讨论，如下图。点 A 在优弧 $\widehat{CAB}$ 上动，可以取无数个位置，点 D 在劣弧 $\widehat{CB}$ 上动，也可以取无数个位置。

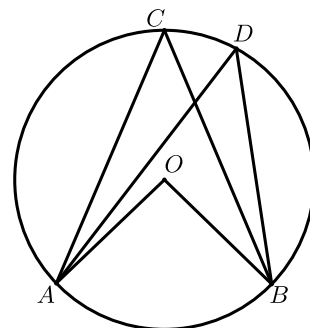


2. 圆周角定理

圆周角定理：在_____或_____中，_____或_____所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．

如图：

$$\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$$



圆周角定理的证明

已知：在 $\odot O$ 中， $\widehat{BC}$ 所对的圆周角是 $\angle BAC$ ，圆心角是 $\angle BOC$ ．

求证： $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ ．

证明：由圆周角在圆内的位置关系，分三种情况讨论．

(1) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边上（如图1），

$$\because OA = OC, \therefore \angle C = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\because \angle BOC = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

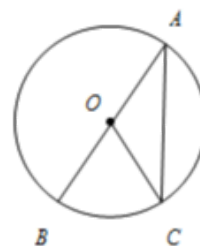


图1

(2) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部，（如图2），作_____，由（1）得出结论得：

$$\because \angle BAD = \underline{\hspace{2cm}}, \angle DAC = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

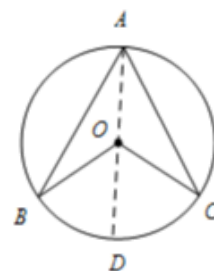


图2

(3) 圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部，（如图3），作_____，由（1）得出结论得：

$$\because \angle DAB = \underline{\hspace{2cm}}, \angle DAC = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle DAC - \angle DAB = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore \angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

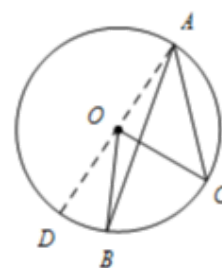


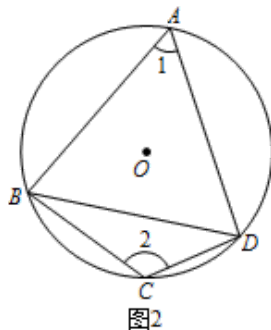
图3

🕒 圆周角定理的推论

推论1： _____ 或 _____ 所对的圆周角相等 .

! **注意：**

不能把 “ _____ ” 改成 “同弦或等弦” , 因为一条弦所对的圆周角有 _____ 种情况 . 一般情况下不相等 , 如图2 .



推论2： _____ (或 _____) 所对的圆周角是 _____ , _____ 的圆周角所对的弦是 _____ .

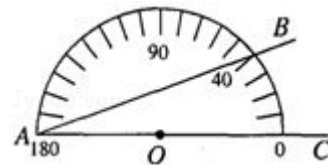
! **注意：**

一般情况下 , 当条件中有直径时 , 往往做出直径所对的圆周角 , 从而得到直角三角形 .

🕒 举个 “栗” 子

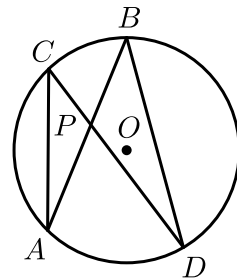
栗子4

7. 如图 , 一个量角器放在 $\angle BAC$ 的上面 , 则 $\angle BAC =$ _____ 度 .



栗子5

8. 如图 , $\odot O$ 中 , 弦 AB 、 CD 相交于点 P , 若 $\angle A = 30^\circ$, $\angle APD = 70^\circ$, 则 $\angle B$ 等于 () .



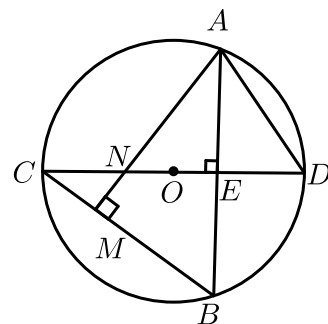
A. 30°

B. 35°

C. 40°

D. 50°

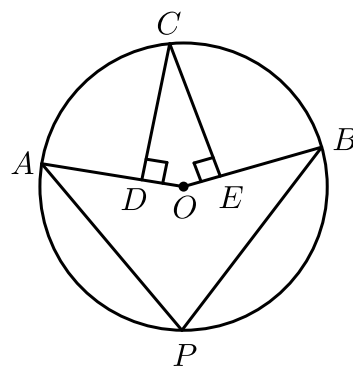
9. 如图, $\odot O$ 中, 直径 $CD \perp$ 弦 AB 于 E , $AM \perp BC$ 于 M , 交 CD 于 N , 连接 AD .



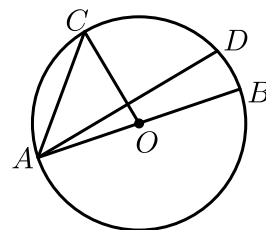
- (1) 求证: $AD = AN$.
- (2) 若 $AB = 8$, $ON = 1$, 求 $\odot O$ 的半径.

栗子6

10. 如图, 点 A, B, C, P 在 $\odot O$ 上, $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, 垂足分别为 D, E , $\angle DCE = 40^\circ$, 则 $\angle P$ 的度数为 ().



- A. 140° B. 70° C. 60° D. 40°
11. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C, D 为 $\odot O$ 上的两点, 且 C 为 $\widehat{AD}$ 的中点, 若 $\angle BAD = 20^\circ$, 则 $\angle ACO$ 的度数为 ().



- A. 30° B. 45° C. 55° D. 60°

12. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = AC$, $\angle BAC = 50^\circ$, 弦 $BD \perp AC$, E 为垂足.

(1) 如图1, 连接 AD , 求 $\angle CAD$ 的度数.

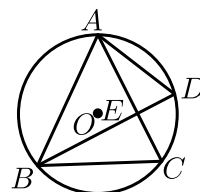
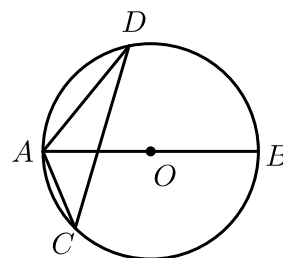


图 1

栗子7

13. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, $\angle ACD = 30^\circ$, 则 $\angle BAD$ 为 ().



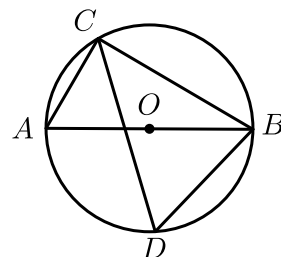
A. 30°

B. 50°

C. 60°

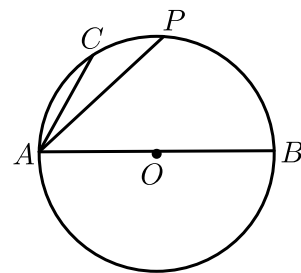
D. 70°

14. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACB$ 的角平分线交 $\odot O$ 于 D . 若 $AC = 6$, $BD = 5\sqrt{2}$, 则 BC 的长为 ____ .

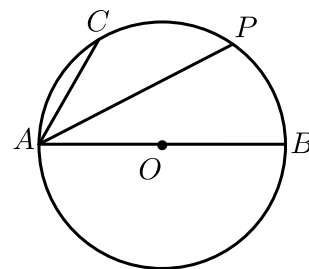


15. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 、 P 是 $\widehat{AB}$ 上两点, $AB = 13$, $AC = 5$.

(1) 如图, 若点 P 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 PA 的长.

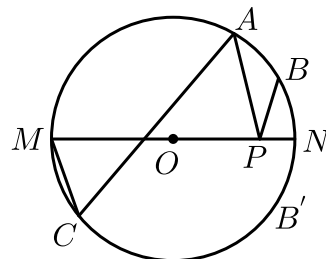


(2) 如图, 若点 P 是 $\widehat{BC}$ 的中点, 求 PA 的长.



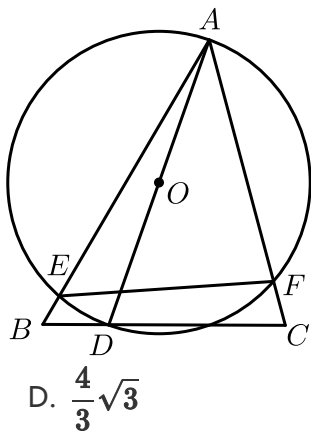
栗子8

16. 如图, MN 是 $\odot O$ 的直径, A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上的三点, $\angle ACM = 60^\circ$, B 点是 $\widehat{AN}$ 的中点, P 点是 MN 上一动点, 若 $\odot O$ 的半径为 1, 则 $PA + PB$ 的最小值为 ().



- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, 点 D 是 BC 边上一个动点, 以 AD 为直径作 $\odot O$, 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F , 若弦 EF 长度的最小值为1, 则 AB 的长为() .



A. $2\sqrt{2}$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

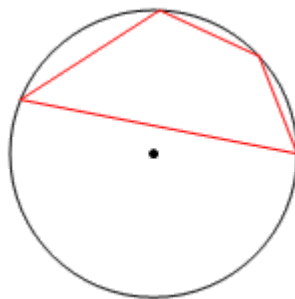
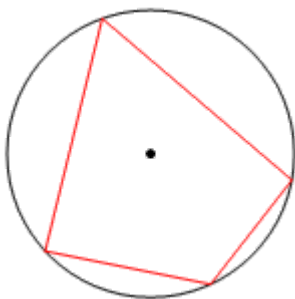
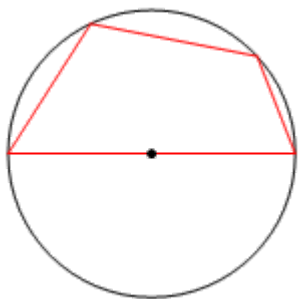
C. 1.5

D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

三、圆内接四边形

1、圆内接四边形：四个顶点都在_____的四边形叫做圆的内接四边形 .

常见的圆内接四边形：



2、圆内接四边形的性质：圆的内接四边形的_____ .

证明：

根据圆周角定理可知

$$\angle 3 = \text{_____, } \angle 2 = \text{_____},$$

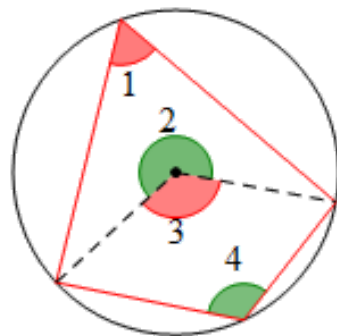
$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = \text{_____},$$

$$\therefore 2\angle 1 + 2\angle 4 = \text{_____},$$

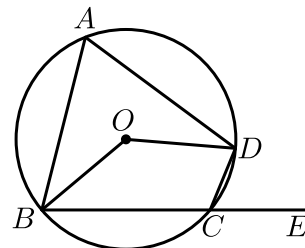
$$\therefore \text{_____}.$$

同理可证四边形的另一组对角的和也为 180° .

所以圆内接四边形对角互补 .



18. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，如果它的一个外角 $\angle DCE = 64^\circ$ ，那么 $\angle BOD = (\quad)$.



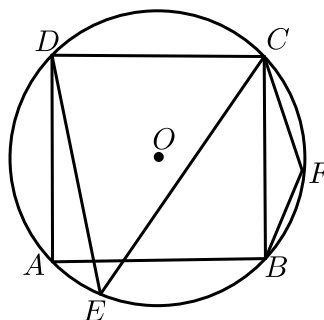
A. 128°

B. 100°

C. 64°

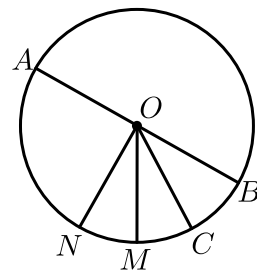
D. 32°

19. 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，则 $\angle E = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\angle F = \underline{\hspace{1cm}}$.



20. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径 .

(1) 如图①， $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \widehat{MN}$ ， $\angle MON = 35^\circ$ ，求 $\angle AON$ 的大小 .



图①

(2) 如图②， E, F 是 $\odot O$ 上的两个点， $AD \perp EF$ 于点 D ，若 $\angle DAE = 20^\circ$ ，求 $\angle BAF$ 的大小 .

